

$b\mathcal{H}$ -базисы для одного класса фасет многогранника разбиения на клики

Р.Ю. Симанчев
osiman@rambler.ru

П.В. Соловьева
polinochka.chervonnykh@mail.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация

Пусть $K_n = (V, E)$ – полный неориентированный n -вершинный граф без петель и кратных рёбер. Остовный подграф $H \subset K_n$ называется M -графом, если каждая его компонента связности (возможно одновершинная) является кликой. Иными словами, всякий M -граф является правильным разбиением графа K_n на вершинно-непересекающиеся клики. Семейство всех M -графов в K_n обозначим через $\mathcal{H}$. Это семейство является множеством допустимых решений задачи о разбиении на клики, заключающейся в нахождении в полном реберно-взвешенном графе M -графа минимального веса [4, 5, 2]. В упомянутых работах рассматриваются полиэдральные свойства [1] этой задачи, а именно строятся классы неравенств, порождающих грани многогранника задачи, на базе которых разработаны алгоритмы ветвей и отсечений. В настоящей работе, применяя технику, предложенную в [6], мы доказываем фасетность неравенств специального класса относительно многогранника задачи разбиения на клики.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-07-00599).

1 Основные понятия и факты

Для любого графа $D \subset K_n$, через VD и ED будем обозначать множества его вершин и рёбер соответственно. Для ребра $e \in E$ будем также использовать запись uv , где u, v – вершины из V , инцидентные ребру e . Множество рёбер, инцидентных вершине u будем обозначать как $\delta(u)$. Каждое множество $R \subset E$ индуцирует некоторый подграф T , в котором $ET = R$ и VT – множество вершин из V , инцидентных рёбрам из R . Граф, индуцированный множеством рёбер R , иногда будем обозначать через R . Для подграфов D, F из K_n положим

$$D \cup F = (VD \cup VF, ED \cup EF), D \cap F = ED \cap EF$$

и если $F \subseteq D$, то $D \setminus F = (VD, ED \setminus EF)$. Кликой в K_n называется подграф, вершины которого попарно смежны. Одновершинный граф также является кликой.

С графом K_n свяжем евклидово пространство R^E размерности $\frac{n^2-n}{2}$, поставив в соответствие каждому ребру ось координат в R^E . Это пространство может рассматриваться как множество вектор-столбцов, компоненты которых индексируются элементами из E . Если $x \in R^E$ и $R \subset E$, то через $x(R)$ обозначим

Copyright © by the paper's authors. Copying permitted for private and academic purposes.

In: Sergey V. Belim, Nadezda F. Bogachenko (eds.): Proceedings of the Workshop on Data, Modeling and Security 2018 (DMS-2018), Omsk, Russia, October 2018, published at <http://ceur-ws.org>

линейную форму $\sum_{e \in R} x_e$. Вектором инциденций произвольного подграфа $D \subset K_n$ называется вектор $x^D \in R^E$ с компонентами $x_e^D = 1$ при $e \in ED$ и $x_e^D = 0$ при $e \notin ED$.

Множество $P \subset R^E$ называется многогранником, если P является выпуклой оболочкой конечного числа точек. Под размерностью ($\dim P$) многогранника P будем понимать уменьшенную на 1 мощность максимального по включению аффинно независимого семейства его точек. Если $\dim P = |E|$, то будем называть P многогранником полной размерности.

Линейное неравенство $a^t x \leq a_0$ ($a, x \in R^E$, $a \neq 0$, $a_0 \in R$) называется правильным относительно многогранника P , если $a^t x \leq a_0$ для любого $x \in P$. Правильное неравенство $a^t x \leq a_0$ называется опорным к P , если существуют $x', x'' \in P$ такие, что $a^t x' = a_0$ и $a^t x'' < a_0$. Всякое опорное к P неравенство порождает множество $\{x \in P | a^t x = a_0\}$, которое называется гранью многогранника P . Грани размерности 0 будем называть вершинами, а грани размерности ($\dim P - 1$) – фасетами многогранника P . Неравенство, порождающее фасету многогранника P , называется фасетным относительно этого многогранника. Многогранником M -графов или, что то же, многогранником задачи разбиения на клики называется множество

$$P_{\mathcal{H}} = \text{conv}\{x^H \in R^E | H \in \mathcal{H}\}.$$

2 Класс правильных неравенств

Будем рассматривать множество E ребер графа K_n в качестве основного множества. В качестве семейства подмножеств $\mathcal{H} \subseteq 2^E$ возьмем семейство всех M -графов в графе K_n . Пусть $W = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ упорядоченное подмножество множества V , p – нечётно. Через F обозначим звезду в K_n с центром в вершине $u \notin W$ и лучами uv_j , а через C – цикл с множеством вершин W и множеством рёбер $\{v_1 v_2, \dots, v_{p-1} v_p, v_p v_1\}$. С графом $F \cup C$ свяжем линейное неравенство:

$$x(EF) - x(EC) \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$$

или, что то же,

$$(x^F - x^C)^t x \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor \quad (1)$$

Лемма 1. *Неравенство (2) является опорным относительно $P_{\mathcal{H}}$.*

Доказательство. Пусть множество $EF \cap EH = \{uv | v \in U\}$, $U \subseteq W$, тогда $|EF \cap EH| = |U| = s$. Если $v_i, v_{i+1} \in U$, то $v_i v_{i+1} \in EC \cap EH$ (вершины из W индексируются по модулю p). Следовательно, множество $EC \cap EH$ будет являться набором цепей. При этом между двумя соседними цепями есть, по крайней мере, одна вершина, не лежащая в U . Обозначим эти цепи $P_1, P_2, \dots, P_t$, причем $|VP_i| \geq 1$, $i = 1, 2, \dots, t$. В связи с этим $s = \sum_{i=1}^t s_i$, где s_i – количество вершин в цепи P_i . Пусть $v(P_i) \in V \setminus U$ – вершина, непосредственно следующая за последней вершиной цепи P_i в цикле C . Тогда множество $VP_i \cup \{v(P_i)\}$ назовём блоком, $i = 1, 2, \dots, t$. Нетрудно заметить, что $|VP_i \cup \{v(P_i)\}| \geq 2$.

Найдем верхнюю оценку числа t . Очевидно, что максимально возможное количество цепей будет при условии минимальности длин этих цепей. Соответственно, это будут цепи длины 0, т.е. цепи, состоящие из 1 вершины. Так как p – нечётно и в данном случае $|VP_i \cup \{v(P_i)\}| = 2$, то количество одновершинных цепей будет не больше, чем количество всех вершин в W , без учёта вершины, не вошедшей в блок, уменьшенное в 2 раза. Иначе говоря, $t \leq \frac{p-1}{2} = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$.

Легко заметить, что $x^H(EC) = |EC \cap EH| = \sum_{i=1}^t |P_i| = \sum_{i=1}^t (s_i - 1) = \sum_{i=1}^t s_i - t = s - t$, где $|P_i|$ – длина цепи P_i , $i = 1, 2, \dots, t$. Следовательно, $x^H(EF) - x^H(EC) = |EH \cap EF| - |EH \cap EC| = s - s + t = t \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$. Правильность неравенства (2) относительно $P_{\mathcal{H}}$ доказана.

Опорность этого неравенства к многограннику $P_{\mathcal{H}}$ следует из того, что вектор инциденций, например, клики на вершинах $\{u, v_1, v_3, v_5, \dots, v_{p-2}\}$ обращает его в равенство.

Лемма доказана. ■

3 Фасетность

В работе [3] представлена техника доказательства фасетности опорного неравенства. Применительно к многограннику полной размерности эта техника имеет следующий вид.

Пусть $b^t x \leq b_0$ опорное к $P_{\mathcal{H}}$ неравенство.

Определение 1. Непустое множество $S \subset E$ будем называть $b\mathcal{H}$ -переключением, если существуют такие $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$, что

- 1) $S = H_1 \Delta H_2$,
- 2) $b^t x^{H_1} = b^t x^{H_2} = b_0$,
где $H_1 \Delta H_2 = (H_1 \setminus H_2) \cup (H_2 \setminus H_1)$ – симметрическая разность множеств H_1 и H_2 .

Определение 2. Элемент $e_0 \in E$ называется $b\mathcal{H}$ -базисом, если выполняются следующие условия:

- (i) $b_{e_0} \neq 0$,
- (ii) для всякого $e \in E \setminus \{e_0\}$ существует такая упорядоченная последовательность $e_1, e_2, \dots, e_t = e$ элементов из E , что при любом $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ элемент e_i принадлежит некоторому $b\mathcal{H}$ -переключению, лежащему в $\{e_0, e_1, e_2, \dots, e_i\}$.

Теорема 1. Для того, чтобы опорное к $P_{\mathcal{H}}$ неравенство $b^t x \leq b_0$ было фасетным, достаточно существования $b\mathcal{H}$ -базиса $e_0 \in E$ [3].

Следуя описанной технике доказательства фасетности опорного неравенства относительно многогранника $P_{\mathcal{H}}$, сформулируем утверждение.

Утверждение 1. Пусть $\mathcal{H}$ семейство всех M -графов в графе K_n , $(x^F - x^C)^t x \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ – неравенство вида (2), индуцированное графом $F \cup C$. Следующие множества рёбер являются $(x^F - x^C)\mathcal{H}$ -переключениями:

- a) одноэлементные множества рёбер $\{st\}$, при $s, t \notin V(F \cup C)$;
- b) множество вида $\{su, sv_i, sv_{i+2}, sv_{i+4}, \dots, sv_{i+(p-3)}\}$, при $s \notin V(F \cup C)$, $i = 1, 2, \dots, p$ (индексы берутся по модулю p);
- c) хорды цикла C , т.е. множества рёбер вида $\{v_i v_j\}$, $2 \leq |i - j| \leq p - 2$;
- d) множество вида $\{uv_i, v_i v_{i+1}, v_i v_{i+3}, \dots, v_i v_{i+(p-2)}\}$, $i = 1, 2, \dots, p$ (индексы берутся по модулю p);
- e) одноэлементные множества рёбер $\{v_i s\}$, при $s \notin V(F \cup C)$, $i = 1, 2, \dots, p$ (индексы берутся по модулю p).

Доказательство. Случай а). Положим H_1 – клика на вершинах $\{u, v_1, v_3, \dots, v_j, \dots, v_{p-2}\}$, и $H_2 = H_1 \cup \{st\}$. Тогда $H_1 \Delta H_2 = \{st\}$ и $(x^F - x^C)^t x^{H_1} = (x^F - x^C)^t x^{H_2} = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$.

Случай б). H_1 – клика на вершинах $\{u, v_i, v_{i+2}, v_{i+4}, \dots, v_{i+(p-3)}\}$ и H_2 – клика на вершинах $\{u, s, v_i, v_{i+2}, v_{i+4}, \dots, v_{i+(p-3)}\}$, $i = 1, 2, \dots, p$ (индексы берутся по модулю p).

Случай с). Пусть имеется хорда $v_i v_j$, $2 \leq |i - j| \leq p - 2$. Будем полагать, что $i < j$. Кроме того, без ограничения общности положим $i = 1$. Построим клику H_1 следующим образом. Если $j = 1(mod 2)$, то H_1 – клика на множестве вершин $\{u, v_2, v_4, \dots, v_{p-1}\}$. Ясно, что в этом случае вершина v_j не принадлежит VH_1 . Если же $j = 0(mod 2)$, то H_1 – клика на множестве вершин $\{u, v_2, v_4, \dots, v_{j-2}, v_{j+1}, \dots, v_p\}$. Вновь $v_j \notin VH_1$. Пусть $H_2 = H_1 \cup \{v_1 v_j\}$. Ясно, что H_1 и H_2 – M -графы, требуемые определением 1.

Случай d). H_1 – клика на вершинах $\{u, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+(p-2)}\}$, $i = 1, 2, \dots, p$ (индексы берутся по модулю p) и $H_2 = H_1 \cup \{uv_i, v_i v_{i+1}, v_i v_{i+3}, \dots, v_i v_{i+(p-2)}\}$, и $(x^F - x^C)^t x^{H_1} = (x^F - x^C)^t x^{H_2} = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$.

Случай e). H_1 – клика на вершинах $\{u, v_{i+1}, v_{i+3}, v_{i+5}, \dots, v_{i+(p-2)}\}$, $i = 1, 2, \dots, p$ (индексы берутся по модулю p) и $H_2 = H_1 \cup \{v_i s\}$.

Утверждение доказано. ■

Пример 1. В качестве иллюстрации к доказательству утверждения 1 рассмотрим граф $F \cup C$ с $p = 7$ (см. рис. 1–5).

Теорема 2. Неравенство $(x^F - x^C)x \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ порождает фасету многогранника M -графов.

Доказательство. Используя обозначения из формулировки утверждения 1, покажем, что $(x^F - x^C)\mathcal{H}$ -базисом может являться любой луч uv звезды F . Зафиксируем луч uv_1 . Условие (i) выполняется. Для проверки условия (ii) мы будем осуществлять переходы

$$\{uv_1\} \rightarrow \{uv_1\} \cup E_1 \rightarrow \{uv_1\} \cup E_1 \cup E_2 \rightarrow \dots \rightarrow \{uv_1\} \cup E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_t = E$$

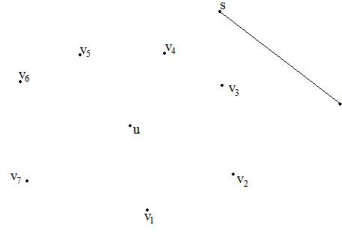


Рис. 1: $(x^F - x^C)\mathcal{H}$ -переключение вида а)

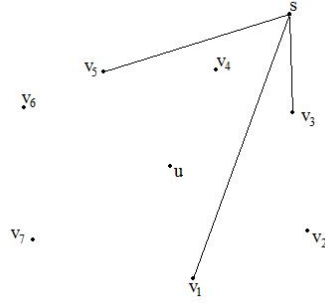


Рис. 2: $(x^F - x^C)\mathcal{H}$ -переключение вида b)

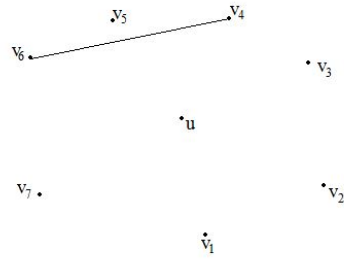


Рис. 3: $(x^F - x^C)\mathcal{H}$ -переключение вида с)

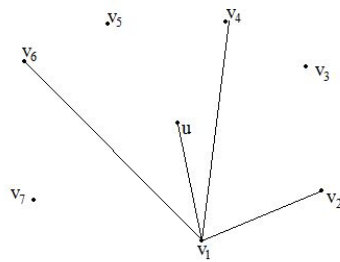


Рис. 4: $(x^F - x^C)\mathcal{H}$ -переключение вида d)

так, что на каждом переходе s каждое ребро $e \in E_s$ получается из $\{uv_1\} \cup E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{s-1}$ за один шаг с помощью $(x^F - x^C)\mathcal{H}$ -переключений из утверждения 1. Эти переходы изобразим в виде таблицы, в левой колонке которой указано очередное множество E_s , а в правой — $(x^F - x^C)\mathcal{H}$ -переключения, которому ребра этого множества принадлежат (отметим, что в этой таблице важен порядок строк):

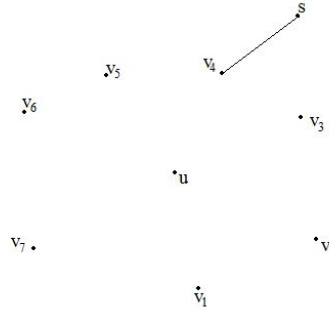


Рис. 5: $(x^F - x^C)\mathcal{H}$ -переключение вида e)

$$E_1 = \{st \mid s, t \notin V(F \cup C)\} - \{st\} \text{ (ymб. 1 a);}$$

$$E_2 = \{sv_i \mid s \notin V(F \cup C)\} - \{sv_i\} \text{ (ymб. 1 e);}$$

$$E_3 = \{v_i v_j \mid 2 \leq |i - j| \leq p - 2\} - \{v_i v_j\} \text{ (ymб. 1 c);}$$

$$E_4 = \{su \mid s \notin V(F \cup C)\} - \{sv_1, sv_3, \dots, sv_{p-2}, su\} \text{ (ymб. 1 b).}$$

Остается построить ребра множества $EF \cup EC$. Мы будем строить их в последовательности $v_1 v_2, uv_2, v_2 v_3, uv_3, \dots, v_{p-1} v_p, uv_p, v_p v_1$, используя п. d) из утверждения 1. Первые четыре ребра в этой последовательности образуют множества E_5, E_6, E_7 и E_8 :

$$E_5 = \{v_1 v_2\} - \{uv_1, v_1 v_2, v_1 v_4, \dots, v_1 v_{p-2}\} \text{ (ymб. 1 d);}$$

$$E_6 = \{uv_2\} - \{uv_2, v_1 v_2, v_2 v_{p-1}, v_2 v_{p-3}, \dots, v_2 v_4\} \text{ (ymб. 1 d);}$$

$$E_7 = \{v_2 v_3\} - \{uv_2, v_2 v_3, v_2 v_5, \dots, v_2 v_{p-1}\} \text{ (ymб. 1 d);}$$

$$E_8 = \{uv_3\} - \{uv_3, v_2 v_3, v_3 v_p, v_3 v_{p-2}, \dots, v_3 v_5\} \text{ (ymб. 1 d);}$$

и так далее. Пары множеств E_5, E_6 и E_7, E_8 строятся с помощью одинакового приема, который применяется далее для построения всех ребер. Нетрудно заметить, что в итоге мы получим все ребра множества E .

Теорема доказана. ■

Заключение

Основным результатом статьи является использование техники переключений, с помощью которой доказывается фасетность опорных неравенств к комбинаторным многогранникам. Аналогичные результаты, подтверждающие эффективность предлагаемой техники, можно найти в работах [7] и [2]. Полное теоретическое обоснование техники $b\mathcal{H}$ -базисов содержится в [6].

Список литературы

- [1] M. Grotschel, M.W. Padberg. *Polyhedral computations. The Travelling Salesman Problem*. Ed. by E.L. Lawler etc., 1985.
- [2] R.Yu. Simanchev, I.V. Urazova. On the polytope faces of the graph approximation problem *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, April 2015, Volume 9, Issue 2, pp 283–291.
- [3] R.Yu. Simanchev, I.V. Urazova. On the Facets of Combinatorial Polytopes. *DOOR-2016. LNCS, Springer, Heidelberg*, 9869:233–243. 2016.
- [4] M. Grotschel, Y. Wakabayashi. Facets of the clique partitioning polytope. *Mathematical Programming*, 47:367–387. 1980.
- [5] M. Grotschel, Y. Wakabayashi. A cutting plane algorithm for a clustering problem. *Mathematical Programming*, (Series B)45:59–96. 1989.

- [6] R.Yu. Simanchev. On facet-inducing inequalities for combinatorial polytopes *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, October 2017, Volume 11, Issue 4, pp 564–571.
- [7] R.Yu. Simanchev. Rank inequalities that generate facets of a polyhedron of connected k -factors *Diskretnyi Analiz i Issledovanie Operatsiy*, 1996. Vol.3 : 84-110. .

$b\mathcal{H}$ -Bases for a Some Class of Facet of a Clique Partitioning Polytope

Ruslan Yu. Simanchev, Polina V. Solov'eva

Let $K_n = (V, E)$ be a complete undirected n -vertex graph without loops and multiple edges. A spanning subgraph $H \subset K_n$ is called an M -graph if each of its connected components (possibly one-vertex) is a clique. We denote the family of all M -graphs in K_n by $\mathcal{H}$. This family is the set of feasible solutions of the clique partitioning problem, consisting in finding in the complete edge-weighted graph of an M -graph of minimal weight [4, 5, 2]. In the mentioned papers, the polyhedral properties [1] of this problem are considered. The classes of inequalities that generate the faces of the problem polytope are constructed, on the basis of which algorithms for branches and cuts are developed. In this paper, using the technique proposed in [6], we prove the facetness of inequalities of a special class with respect to the clique partitioning polytope.

The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 18-07-00599).